ISSN 2720-2569

Współczesne Problemy Zarządzania • Volume 11 • Number 1 (22) • 2023 • 81-102
DOI: https://doi.org/10.52934/wpz.2023.05

Józef Banaś
Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu
jbanas@prz.edu.pl https://orcid.org/0000-0002-2838-5569

Monika Krajewska
Państwowa Wyższa Szkoła Techniczno-Ekonomiczna w Jarosławiu
monika.krajewska@pwste.edu.pl https://orcid.org/0009-0008-0260-1113

O rozwiązaniach nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha

Wprowadzenie

Celem przedkładanej pracy jest omówienie zagadnień dotyczących istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w pewnych ciągowych przestrzeniach Banacha. Przestrzenie re należą obecnie do przestrzeni klasycznych i są często rozważane w różnych zagadnieniach związanych z nieskończonymi układami równań algebraicznych, równań różniczkowych jak również równań całkowych.

W pracy będziemy rozważać nieskończone układy równań różniczkowych, których rozwiązania należeć będą do dwóch z wyżej wspomnianych ciągowych przestrzeni Banacha, a mianowicie do przestrzeni ciągowej l_1 oraz l_∞. Przestrzeń l_1 złożona jest ze wszystkich ciągów liczbowych postaci (x_n) takich, że szereg utworzony z bezwzględnych wartości wyrazów tych ciągów jest zbieżny, tzn.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$$

W szczególności zauważmy, że jeżeli $(x_n)\epsilon l_1$, to $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Wynika to ze znanego z analizy matematycznej warunku koniecznego zbieżności szeregu liczbowego. Zatem możemy powiedzieć, że przestrzeń l_1 jest niewielka, ponieważ zawiera ona ciągi zmierzające „szybko" do zera.

Z drugiej strony przestrzeń l_∞ składa się z ciągów (x_n) takich, że są to ciągi ograniczone. Oznacza to, że $(x_n)\epsilon l_\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje stała $M > 0$ taka, że $|x_n| \le M$ dla każdego $n\epsilon\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ oznacza tutaj zbiór liczb naturalnych).

Oczywiście, l_1 jest dość „małym" podzbiorem przestrzeni l_∞. Z drugiej strony, przestrzeń l_1 ma wiele ciekawych dla zastosowań własności. Z tego powodu, interesujące i zarazem ważnej jest szukanie rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych, które należą do jednej lub drugiej ze wspomnianych tutaj przestrzeni l_1 lub l_∞.

Zwróćmy teraz uwagę na samą ideę szukania rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych Oczywiście szczegółowo idea ta będzie przedstawiona w dalszym ciągu pracy.

Z grubsza rzecz ujmując, poszukamy rozwiązań wspomnianych nieskończonych układów równań różniczkowych jako ciągów funkcji $(x_n(t)) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \dots)$, określonych dla t, przebiegających pewien przedział postaci $[0, T]$ i takich, że dla każdej ustalonej liczby $t\epsilon[0, T]$ ciąg $(x_n(t))$ jest ciągiem liczbowym należącym do rozważanej a priori przestrzeni ciągowej Banacha, np. do przestrzeni l_1 lub do znacznie szerszej przestrzeni ciągowej l_∞. Założenia narzucone na funkcje generujące rozważany nieskończony układ równań różniczkowych będą implikowały zarówno istnienie rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych, jak również będą wpływać na pewne własności ciągów funkcyjnych będących rozwiązaniami tych równań.

Warto zwrócić uwagę na liczne, ważne zastosowania nieskończonych układów równań różniczkowych. Zastosowania te są szczegółowo omówione w monografiach (zob. Deimling, 1977; Deimling, 1985; Banaś, Mursaleen, 2014). Jednym z najbardziej ciekawych i ważnych zastosowań jest modelowania procesu stochastycznego urodzin i śmierci przy pomocy takich układów (por. Fisz, 1980).

Głównym narzędziem, który będziemy posługiwać się w tej pracy, będzie teoria miar niezwartości w przestrzeniach Banacha, która została omówiona szczegółowo w monografiach (Banaś, Goebel, 1980; Banaś, Mursaleen, 2014). Teoria ta będzie przedstawiona w jednym z podrozdziałów przedkładanej pracy).

Ponadto, przedstawimy również podrozdział zawierający podstawowe rezultaty z zakresu teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha, które będą wykorzystane w niniejszej pracy. Rezultaty te pochodzą z pozycji (Banaś, Lecko, 2001; Banaś, Mursaleen, 2014).

Wybrane fakty dotyczące teorii miar niezwartości

Jak wspominaliśmy już wcześniej, przedstawimy teraz kilka podstawowych faktów dotyczących teorii miar niezwartości (por. Banaś, Goebel, 1980).
Załóżmy zatem, że E jest rzeczywistą przestrzenią Banacha z normą oznaczoną symbolem $\|\cdot\|_E$ lub skrótowo przez $\|\cdot\|$. Oznaczmy przez $\mathbb{R}$ zbiór liczb rzeczywistych oraz przez $\mathbb{R}_+$ zbiór liczb rzeczywistych nieujemnych, tzn. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$. Symbolem $B(x_0, r)$ oznaczać będziemy kulę o środku w punkcie x_0 i promieniu $r > 0$ w przestrzeni E tzn. $B(x_0, r) = \{x \epsilon E : \|x - x_0\| \leq r\}$. Jeżeli X jest podzbiorem przestrzeni E to symbolem $\bar{X}$ będziemy oznaczać domknięcie zbioru X natomiast symbol $ConvX$ oznacza wypukłą i domkniętą powłokę zbioru X. Przez $diamY$ oznaczamy średnicę zbioru Y o ile założymy, że zbiór Y jest ograniczony. Dla zadanych zbiorów X, Y w przestrzeni E symbolami $X + Y$ oraz αX oznaczamy podstawowe operacje algebraiczne na zbiorach X i Y:

$$X + Y = \{x + y : x \epsilon X, y \epsilon Y\},$$

$$\alpha X = \{\alpha x : : x \epsilon X\},\ \alpha \epsilon \mathbb{R}.$$

Rodzinę wszystkich niepustych i ograniczonych podzbiorów przestrzeni Banacha E oznaczamy symbolem $\mathfrak{M}_E$, natomiast jej podrodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów relatywnie zwartych oznaczamy symbolem $\mathfrak{N}_E$.
Załóżmy dalej, że $X, Y \epsilon \mathfrak{M}_E$. Wtedy wielkość $d(X, Y)$ zdefiniowaną równością

$$d(X, Y) = inf\{r : X \subset B(Y, r)\},$$

gdzie symbol $B(Y, r)$ oznacza tzw. kulę o środku w zbiorze Y oraz o promieniu r ($B(Y, r) \bigcup_{y \epsilon Y} B(y, r)$), nazywamy niesymetryczną odległością zbiorów X i Y. Odległością Hausdorffa zbiorów X i Y nazywamy liczbę:

$$D(X, Y) = max\{d(X, Y), d(Y, X)\}.$$

Warto zwrócić uwagę na to, że odległość Hausdorffa D jest pseudometryką w rodzinie $\mathfrak{M}_E$ oraz jest metryką w rodzinie $\mathfrak{M}_E^c$ złożonej ze wszystkich zbiorów domkniętych należących do rodziny $\mathfrak{M}_E$. Przestrzeń metryczna $(\mathfrak{M}_E^c, D)$ jest zupełna jeżeli E jest przestrzenią Banacha (zob. Kuratowski, 1966).

W niniejszej pracy będziemy nasze rozważania prowadzić głównie w dwóch przestrzeniach Banacha, wspomnianych we wprowadzeniu. Są to przestrzenie ciągowe l_1 oraz l_∞.
Przestrzeń l_1 złożona jest ze wszystkich ciągów postaci (x_n) o wyrazach rzeczywistych takich, że $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n| < \infty$. Łatwo pokazać, że $l_1$ma strukturę przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ z operacjami dodawania ciągów po współrzędnych i mnożenia ciągów przez liczby rzeczywiste. Normę w przestrzeni l_1 określamy wzorem:

$$\|x\| = \|(x_n)\| = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|.$$

Norma ta jest zupełna, a więc l_1 z tą normą tworzy przestrzeń Banacha (zob. Deimling, 1985).
Przestrzeń l_∞ to zbiór wszystkich ciągów rzeczywistych $x = (x_n)$, które są ograniczone, tzn. takich ciągów, że dla każdego ciągu (x_n) istnieje stała $M > 0$ taka, że $|x_n| \leq M$ dla każdego $n \epsilon \mathbb{N}$. Można pokazać, że l_∞ jest przestrzenią Banacha, jeżeli normę w l_∞ określimy wzorem

$$\|x\| = \|(x_n)\| = \sup\{|x_n| : n = 1, 2, \ldots\}$$

(por. Deimling, 1985).

Przejdziemy teraz do omówienia podstawowych faktów dotyczących miar niezwartości w przestrzeniach Banacha (zob. Banaś, Goebel, 1980).
Załóżmy zatem, że E jest zadaną przestrzenią Banacha. Przyjmujemy następującą definicję.

Definicja 1. Funkcję $\mu: \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ będziemy nazywać miarą niezwartości w przestrzeni E, jeżeli spełnione są następujące warunki:

i. Rodzina $\ker\mu = \{X \epsilon \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\}$ jest niepusta i $\ker\mu \subset \mathfrak{N}_E$.
ii. $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$.
iii. $\mu(\bar{X}) = \mu(X)$.
iv. $\mu(ConvX) = \mu(X)$.
v. $\mu(\alpha X + (1-\alpha)Y) \leq \alpha\mu(X) + (1-\alpha)\mu(Y)$ dla $\alpha \epsilon [0, 1]$.
vi. Jeżeli (X_n) jest zbiorem ciągów domkniętych z $\mathfrak{M}_E$ takich, że $X_{n+1} \subset X_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ oraz $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0$, to zbiór $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ jest niepusty.

Rodzinę $\ker\mu$ występującą w aksjomacie i. nazywamy jądrem miary niezwartości μ.
Zauważmy dalej, że z aksjomatu vi. Wynika, że $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Stąd wynika, że $\mu(X_\infty) = 0$ a więc zbiór X_∞ należy do jądra $\ker\mu$. Fakt ten jest bardzo ważny w zastosowaniach (zob. Banaś, Goebel, 1980).

Rozważamy również miary niezwartości, które oprócz aksjomatów i.-vi. Spełniają jeszcze dodatkowe warunki. Mianowicie, jeżeli μ jest miarą niezwartości w przestrzeni Banacha E, to miarę tę nazywamy **subliniową,** jeżeli spełnia ona warunki:

vii. $\mu(\alpha X) = |\alpha|\mu(X)$, $\alpha \epsilon \mathbb{R}$.
viii. $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$.

Mówimy, że miara niezwartości μ ma **własność maksimum**, jeżeli
ix. $\mu(X \cup Y) = max\{\mu(X),\ \mu(Y)\}$.

Miarę μ nazywamy **pełną**, jeżeli
x. $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$.

Miarę niezwartości μ nazywamy **regularną,** jeżeli jest subliniowa, pełna i ma własność maksimum.

Jedną z najwcześniej zdefiniowanych miar niezwartości, a zarazem jedną z najwygodniejszych w zastosowaniach, jest tzw. **miara niezwartości Hausdorffa**, która jest zdefiniowana wzorem

$$\chi(x) = \inf\{\varepsilon > 0: X \text{ ma skończoną } \varepsilon\text{-sieć w } E\}.$$

Miara Hausdorffa χ jest regularną miarą niezwartości, mającą jeszcze dodatkowe własności (zob. Banaś, Goebel, 1980).
Ponadto, można pokazać, że

$$\chi(x) = D(X, \mathfrak{N}_E),$$

gdzie $D(X, \mathfrak{N}_E)$ oznacza odległość w sensie metryki Hausdorffa zbioru X od rodziny $\mathfrak{N}_E$, tzn.

$$D(X, \mathfrak{N}_E) = inf\{D(X, Y): Y \epsilon \mathfrak{N}_E\}.$$

Oprócz tego, w pewnych przestrzeniach Banacha miarę Hausdorfa można wyrazić przy pomocy formuły nawiązującej do struktury tych przestrzeni. Tak jest np. we wspomnianej wyżej przestrzeni ciągowej l_1.
Mianowicie, jeżeli $X \epsilon \mathfrak{M}_{l_1}$, to wtedy mamy

$$\chi(x) = \lim_{n\to\infty}\{sup\{\textstyle\sum_{k=n}^{\infty}|x_k|: x = (x_i)\epsilon X\}\}. \tag{1}$$

Okazuje się jednak, że w drugiej rozważanej wyżej przestrzeni ciągowej, przestrzeni l_∞, nie jest znana formuła dla miary niezwartości Hausdorffa w tej przestrzeni. Co więcej, nie znamy żadnej wygodnej formuły wyrażającej regularną miarę niezwartości w przestrzeni l_∞ (por. Banaś, Goebel, 1980).

Z tego względu posługujemy się w przestrzeni l_∞ formułami, które wyrażają miary niezwartości w sensie przytoczonej wyżej Definicji 1.
Jedną z tego typu miar niezwartości w przestrzeni l_∞, wygodną w zastosowaniach, jest miara μ_d zdefiniowana równością

$$\mu_d(X) = \limsup_{n\to\infty} \operatorname{diam} X_n, \tag{2}$$

gdzie

$$X_n = \{x_n : x = (x_i) \epsilon X\}$$

oraz

$$\operatorname{diam} X_n = \sup\{|x_n - y_n| : x = (x_i), y = (y_i) \epsilon X\},$$

przy czym $X \epsilon \mathfrak{M}_{l_\infty}$.
Miara niezwartości μ_d określona wzorem (2) jest subliniową miarą niezwartości, ale nie ma ona własności maksimum. Ponadto, miara ta nie jest pełna.

Twierdzenia egzystencjalne dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha

W podrozdziale tym przytoczymy kilka twierdzeń o istnieniu rozwiązań zagadnienia początkowego Cauchy'ego dla równania różniczkowego w przestrzeni Banacha.

Załóżmy zatem, że E jest zadaną przestrzenią Banacha oraz, że dana funkcja $f : [0, T] \times B(x_0, r) \to E$, gdzie $[0, T]$ jest zadanym przedziałem liczbowym oraz $B(x_0, r)$ jest kulą o środku w pewnym punkcie $x_0 \epsilon E$ oraz o promieniu $r > 0$.
Rozważmy równanie różniczkowe:

$$x' = f(t, x) \tag{3}$$

z warunkiem początkowym:

$$x(0) = x_0. \tag{4}$$

Zagadnienie Cauchy'ego dla równania (3) z warunkiem początkowym (4) polega na znalezieniu rozwiązania $x = x(t)$ równania różniczkowego (3), określonego na pewnym przedziale $I = [0, T]$ i spełniającego na tym przedziale równania (3) oraz takiego, że spełnia ono warunek początkowy (4), gdzie x_0 jest zadanym punktem przestrzeni Banacha E.

Załóżmy dalej, że μ jest zadaną miarą niezwartości w przestrzeni E.

Zbiorem jądrowym miary niezwartości μ w przestrzeni E będziemy nazywać zbiór E_μ określony równością

$$E_\mu = \{x \in E : \{x\} \in \ker \mu\}$$

(por. Banaś, Lecko, 2001). Zbiór jądrowy E_μ jest domkniętym podzbiorem przestrzeni E. Co więcej, jeżeli μ jest subliniową miarą niezwartości, to wtedy E_μ jest domkniętą liniową podprzestrzenią przestrzeni E.

Sformułujemy teraz twierdzenie, które jest wygodne w zastosowaniach i które będziemy stosować w dalszych rozważaniach.

Twierdzenie 1. *Załóżmy, że funkcja f jest jednostajnie ciągła na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ oraz $\|f(t,x)\| \leqslant A$, gdzie $AT \leqslant r$ i $I = [0,T]$. Następnie, niech μ będzie subliniową miarą niezwartości w E taką, że $\{x_0\} \in \ker \mu$. Zakładamy, że dla każdego niepustego zbioru $X \subset B(x_0, r)$ i dla prawie wszystkich $t \in I$ zachodzi następująca nierówność*

$$\mu(f(t,X)) \leqslant p(t)\mu(X), \tag{5}$$

gdzie $p(t)$ jest funkcją całkowalną na przedziale I. Wtedy problem początkowy (3)–(4) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = x(t)$ na przedziale I takie, że $x(t) \in E_\mu$ dla $t \in I$.

Niżej podamy twierdzenie, które jest nieznaczną modyfikacją rezultatu z Twierdzenia 1, i jest wygodniejsze do zastosowania. (por. Banaś, Lecko, 2001; Banaś, Mursaleen, 2014).

Twierdzenie 2. *Załóżmy, że f jest funkcją zdefiniowaną na zbiorze $[0,T] \times E$ o wartościach w E taką, że*

$$\|f(t,x)\| \leqslant P + A\|x\| \tag{6}$$

dla każdego $t \in [0,T]$ i $x \in E$, gdzie P i A są nieujemnymi stałymi. Następnie załóżmy, że f jest jednostajnie ciągła na $[0,T_1] \times B(x_0, r)$, gdzie $AT_1 < 1$ oraz

$$r = \frac{(P+A)T_1\|x_0\|}{1-AT_1}.$$

Ponadto zakładamy, że f spełnia warunek (5) z subliniową miarą niezwartości μ taką, że $x_0 \in E_\mu$. Wtedy problem (3)–(4) ma rozwiązanie $x = x(t)$ na przedziale $[0,T_1]$ takie, że $x(t) \in E_\mu$ dla $t \in [0,T_1]$.

Zwróćmy uwagę na to, że na podstawie pewnych rezultatów uzyskanych w teorii równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha, w przypadku, gdy E

jest przestrzenią ośrodkową (np. $E=l_1$) oraz μ jest regularną miarą niezwartości (np. $\mu=\chi$).

Twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha

Jeżeli jako przestrzeń Banacha weźmiemy przestrzeń ciągową, wtedy równanie różniczkowe jest równoważne nieskończonemu układowi równań różniczkowych. Stwarza to możliwość bardziej subtelnych rozważań dotyczących rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych, gdzie w założeniach istnienia rozwiązań wykorzystujemy strukturę danej przestrzeni.

W rozdziale tym przedstawimy wyniki dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_1 w podrozdziale oraz w przestrzeni ciągów ograniczonych.

Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_1.

Nasze rozważania na temat rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych na początku ulokujemy w ciągowej przestrzeni Banacha l_1, omówionej szczegółowo wcześniej. Głównym narzędziem wykorzystywanym w naszych badaniach będzie miara niezwartości Hausdorffa wyrażona w przestrzeni l_1 za pomocą wzoru (1), czyli:

$$\chi(X) = \lim_{n\to\infty}\left\{\sup\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|x_k| : x=(x_i)\in X\right\}\right\},$$

dla $X \in \mathfrak{M}_{l_1}$.

Rozważmy zatem nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = f_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{7}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{8}$$

dla $n = 1, 2, \dots$.

Interesuje nas istnienie rozwiązania $x = x(t) = (x_n(t))$ problemu (7)–(8), które jest zdefiniowane na przedziale $I = [0, T]$ i takie, że $x(t) \in l_1$ dla każdego $t \in I$.

Problem Cauchy'ego (7)–(8) będziemy rozważali pod następującymi założeniami:

(i) $x_0 = (x_n^0) \in l_1$.

(ii) Funkcja $f : I \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ $(n = 1, 2, \dots)$ odwzorowuje w sposób ciągły zbiór $I \times l_1$ w l_1.

(iii) Istnieją nieujemne funkcje $p_n(t)$ i $a_n(t)$ zdefiniowane na I takie, że

$$|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n(t) + a_n(t)|x|$$

dla $t \in I, x = (x_n) \in l_1$ i dla $n = 1, 2 \dots$.

(iv) Funkcje $p_n(t)$ są ciągłe na I i szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} p_n(t)$ jest zbieżny na przedziale I.

(v) Ciąg $(a_n(t))$ jest wspólnie ograniczony na przedziale I i funkcja

$$a(t) = \limsup_{n\to\infty} a_n(t)$$

jest całkowalna na przedziale I.

Możemy teraz przedstawić zapowiadane twierdzenie:

Twierdzenie 3. *Pod powyżej sformułowanymi założeniami* (i) – (v) *problem (7)–(8) ma przynajmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale I, jeśli $AT < 1$, gdzie A jest liczbą zdefiniowaną jako:*

$$A = \sup\{a_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \dots\}.$$

Co więcej, $x(t) \in l_1$ dla każdego $t \in I$.

Dowód. Weźmy dowolnie $x = (x_n) \in l_1$ i $t \in I$. Wtedy na podstawie założeń mamy:

$$\begin{aligned}\|f(t,x)\|_{l_1} &= \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(p_n(t) + a_n(t)|x_n|) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(p_n(t) + \sup\{a_n(t) : n = 1, 2, \dots\} \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \\ &\leqslant P + A\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|,\end{aligned}$$

gdzie:

$$P = \sup\Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} p_n(t) : t \in I\Big\}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\|f(t,x)\|_{l_1} \leqslant P + A\|x\|_{l_1}$$

co oznacza, że spełniony jest warunek (6) z Twierdzenia 2.
Następnie, weźmy liczbę r zdefiniowaną w Twierdzeniu 2, tzn. niech $r = \frac{(P+A)T\|x_0\|}{1-AT}$. Rozważmy operator $f = (f_n)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. Wystarczy teraz sprawdzić, że operator f spełnia warunek (6) z Twierdzenia 2. A zatem weźmy zbiór X taki, że $X \in \mathfrak{M}_{l_1}$. Wtedy, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
\chi(f(t,X)) &= \lim_{i\to\infty}\left\{\sup_{x=(x_n)\in X}\sum_{k=i}^{\infty}|f_k(t,x_1,x_2,\dots)|\right\}\\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\left\{\sup\left\{\sum_{k=i}^{\infty}(p_k(t)+a_k(t)|x_k|) : x=(x_n)\in X\right\}\right\}\\
&\leqslant \lim_{i\to\infty}\left\{\sum_{k=i}^{\infty}(p_k(t)+\sup\{a_k(t) : k\geqslant i\}\sum_{k=i}^{\infty}|x_k|\right\}.
\end{aligned}$$

Na podstawie założeń (iv) i (v) wnioskujemy, że zachodzi następujące oszacowanie:

$$\chi(f(t,X) \leqslant a(t)\chi(X).$$

Ponieważ przestrzeń l_1 jest ośrodkowa, więc wnioskujemy, że spełnione są wszystkie założenia Twierdzenia 2.
Tym samym możemy uznać, że dowód naszego twierdzenia został zakończony.

Twierdzenia egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞.

Rozważmy następujący semiliniowy, nieskończony układ równań różniczkowych mający postać:

$$x_n' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_1, x_2, \dots) \tag{9}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{10}$$

dla $n = 1, 2, \dots$ oraz $t \in I$.
Powyżej opisany problem (9) – (10) będziemy rozważali w przestrzeni Banacha l_∞ pod następującymi założeniami:

(i) $x_0 = (x_n^0) \in l_\infty$.

(ii) Funkcja $f = (f_1, f_2, \dots)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞ oraz jest ciągła jednostajnie na $I \times l_\infty$, gdzie $I = [0, T]$.

(iii) Istnieje ciąg (p_n) zbieżny do zera taki, że $|f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \leqslant p_n$ dla $t \in I$, $x = (x_n) \in l_\infty$ i dla $n = 1, 2 \dots$.

(iv) Dla wszystkich naturalnych liczb n, j funkcje $a_{nj}(t) = a_{nj} : I \to \mathbb{R}_+$ są niemalejące na przedziale I.

(v) Dla każdego $n = 1, 2, \dots$ szereg funkcyjny $\sum\limits_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale I.

Biorąc pod uwagę założenia (iv) i (v) dla dowolnie ustalonego $n = 1, 2, \dots$ możemy rozważyć funkcje $A_n(t)$, $\bar{A}_n(t)$, $\bar{\bar{A}}_n(t)$ zdefiniowane na przedziale I w następujący sposób:

$$A_n(t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t),$$
$$\bar{A}_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t),$$
$$\bar{\bar{A}}_n(t) = \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t).$$

Oczywiście powyższy wzór definiuje $\bar{A}_n(t)$ dla $n \geqslant 2$. Możemy rozszerzyć tę definicję kładąc $\bar{A}_1(t) = 0$ dla $t \in I$.

Co więcej zauważmy, że funkcje $A_n(t)$, $\bar{A}_n(t)$, $\bar{\bar{A}}_n(t)$ są nieujemne i niemalejące w przedziale I.

W dalszej części będziemy dodatkowo nakładać następujące założenia:

(vi) Ciąg $(\bar{\bar{A}}_n(t))$ jest jednostajnie zbieżny do zera na przedziale I.

(vii) Ciąg $(A_n(t))$ jest jednakowo ciągły i wspólnie ograniczony na przedziale I.

Uwaga 4. *Zwróćmy uwagę, że w założeniu (ii) wystarczy wymagać, żeby funkcja* $f = (f_1, f_2, \dots)$ *była jednostajnie ciągła na zbiorze* $I \times B(x_0, r)$ *dla dowolnie ustalonego* $r > 0$*. Wynika to z Twierdzenia 2 i jest używane w dowodzie poniżej przedstawionego wyniku.*

Dla naszych dalszych rozważań zdefiniujmy następujące stałe:

$$A = \sup\{A_n(t) : t \in I, n = 1, 2, \dots\},$$

$$P = \sup\{p_n : n = 1, 2, \dots\}.$$

Zauważmy, że na podstawie narzuconych założeń mamy, że $A < \infty$ i $P < \infty$.

Teraz możemy sformułować nasz wynik.

Twierdzenie 5. *Załóżmy, że spełnione są warunki* (i) - (vii) *i niech* $AT < 1$*. Wtedy problem (9) – (10) ma przynajmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *zdefiniowane na przedziale* I *takie, że* $x(t) \in l_\infty$ *dla* $t \in I$.

Dowód. Dla dowolnie ustalonego $x = (x_n) \in l_\infty$ i $t \in I$ oznaczmy

$$g_n(t, x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_1, x_2, \dots),$$

$$g(t, x) = (g_1(t, x),\ g_2(t, x), ...) = (g_n(t, x)).$$

Następnie ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, stosując narzucone założenia, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|g_n(t, x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(x)|x_j| + |f_n(t, x_1, x_2, \dots)| \\ &\leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)\right) \sup\{|x_j| :\ j = 1, 2, \dots\} + p_n \leqslant A_n(t)\|x\| + p_n.\end{aligned}$$

Daje to następujące oszacowanie:

$$||g(t, x)|| \leqslant P + A||x|| \ , \tag{11}$$

gdzie symbol $\| \cdot \|$ oznacza normę w przestrzeni l_∞. Z powyższego oszacowania wnioskujemy, że operator $g = g(t, x)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞.

Następnie, weźmy liczbę $r = \frac{(P+A)T_1\|x_0\|}{1-AT_1}$ (por. Twierdzenie 2). Rozważmy operator g na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.
Ustalmy teraz $t, s \in I$ i $x, y \in B(x_0, r)$. Nie tracąc ogólności możemy założyć, że $s < t$ (por. założenie (iv)). Wtedy, na podstawie naszych założeń, dla ustalonego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$\left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t, x_1, x_2, ...) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j - f_n(s, y_1, y_2, ...)\right|$$

$$\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j\right| + |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)|$$

$$\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)y_j\right|$$

$$+ \ |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{\infty}[a_{nj}(t) - a_{nj}(s)]x_j\right| + \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)(x_j - y_j)\right|$$

$$+ \ |f_n(t, x_1, x_2, ...) - f_n(s, y_1, y_2, ...)|$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}[a_{nj}(t) - a_{nj}(s)]|x_j| + \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)|x_j - y_j|$$

$$+ \ |f_n(t, x) - f_n(s, y)|$$

$$\leqslant ||x|| \left[\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t) - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)\right] + ||x - y|| \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(s)$$

$$+ \ |f_n(t, x) - f_n(s, y)|$$

$$\leqslant ||x|||A_n(t) - A_n(s)| + A||x - y|| + ||f(t, x) - f(s, y)||$$

$$\leqslant (||x_0|| + r) \sup\{|A_n(t) - A_n(s)| : \ n = 1, 2, ...\} + A||x - y||$$

$$+ \ ||f(t, x) - f(s, y)||$$

Stąd, mając na uwadze założenia (ii) i (vii) wnioskujemy, że operator $g(t, x)$ jest jednostajnie ciągły na zbiorze $I \times B(x_0, r)$.

Następnie, weźmy niepusty podzbiór X kuli $B(x_0, r)$ i ustalmy $x, y \in X$, $t \in I$. Wtedy, dla dowolnie ustalonej naturalnej liczby n, $n \geqslant 2$, otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
|g_n(t,x)-g_n(t,y)| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| \\
&+ \ |f_n(t,x_1,x_2,...)-f_n(t,y_1,y_2,...)| \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)x_j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)y_j - \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| \\
&+ \ |f_n(t,x_1,x_2,...)| + |f_n(t,y_1,y_2,...)| \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)(x_j-y_j)\right| + \left|\sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)(x_j-y_j)\right| + 2p_n \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)|x_j-y_j| + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j-y_j| + 2p_n \\
&\leqslant ||x-y|| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) + \left(\sum_{j=i}^{\infty} a_{nj}(t)\right) \sup\{|x_j-y_j| : \ j \geqslant n\} + 2p_n \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam}X + \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} + 2p_n \ .
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania otrzymujemy następującą nierówność:

$$
\mathrm{diam} g_n(t,X) \leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam}X + \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} + 2p_n \ ,
$$

która zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Stąd dostajemy:

$$
\begin{aligned}
\sup\{\mathrm{diam} g_j(t,X) : \ j \geqslant n\} &\leqslant \sup\{\bar{A}_j(t) : j \geqslant n\}\mathrm{diam}X \\
&+ [\sup\{\bar{\bar{A}}_j(t) : \ j \geqslant n] \sup\{\mathrm{diam}X_j : \ j \geqslant n\} \\
&+ 2\sup\{p_j : \ j \geqslant n\} \ .
\end{aligned}
$$

Powyższe oszacowania i założenia (iii) i (v)–(vii) pozwalają nam wywnioskować następującą nierówność:

$$
\mu(g(t,X)) \leqslant b(t)\mu(X) \ , \tag{12}
$$

gdzie funkcja $b(t)$ jest zdefiniowana na przedziale I w następujący sposób:

$$
b(t) = \limsup_{n\to\infty} \bar{\bar{A}}_n(t) \ .
$$

Ostatecznie, biorąc pod uwagę (11), (12) i inne fakty ustalone w powyżej przeprowadzonym rozumowaniu, na podstawie Twierdzenia 2 wnioskujemy, że istnieje rozwiązanie $x(t) = (x_i(t))$ problemu (9)–(10) takie, że $x(t) \in l_\infty$ dla każdego $t \in I$. Dowód jest zakończony.

Uwaga 6. *Zauważmy, że na podstawie Twierdzenia 2 można pokazać (zob. Banaś, Goebel, 1980), że wszystkie rozwiązania* $x = x(t) = x_n(t)$ *problemu (9)–(10) należące do kuli* $B(x_0, r)$*, tzn.* $x(t) \in B(x_0, r)$ *dla* $t \in I$ *są takie, że* $x(t) \in \ker \mu$ *dla* $t \in I$*, gdzie* μ *jest miarą niezwartości w przestrzeni* l_∞ *wyrażoną wzorem (2).* Przedstawimy teraz przykład, ilustrujący wynik uzyskany w Twierdzeniu 6.

Przykad 7. *Rozważmy semiliniowy nieskończony układ równań różniczkowych postaci (9), gdzie funkcje:* a_{nj} *oraz* $f_n(t, x_1, x_2, ...)$ *są zdefiniowane w następujący sposób:*

$$a_{nj} = \frac{t^j}{nj},$$

$$f_n(t, x_1, x_2, ...) = \frac{t \operatorname{arc\,tg}(x_n + x_{n+1})}{n + x_n^2 + x_{n+1}^2},$$

gdzie $n, j = 1, 2, ...$ i $t \in I$ oraz $T < 1$. Ponadto załóżmy, że podany wyżej nieskończony układ równań różniczkowych jest rozważany z warunkami początkowymi (10).

Używając klasycznych metod analizy matematycznej można pokazać, że funkcje $a_{nj}(t)$ spełniają założenia (iv) i (v).

Co więcej, dla dowolnie ustalonej liczby naturalnej n mamy:

$$A_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j}{j} = -\frac{1}{n} \ln(1 - t), \tag{13}$$

dla $t \in I$. Z tego wynika, że ciąg $\bar{A}_n(t)$ występujący w założeniu (vi) jest jednostajnie zbieżny do zera na przedziale I. Rzeczywiście, na podstawie nierówności:

$$\bar{A}_n(t) \leqslant A_n(t) \leqslant -\frac{1}{n} \ln(1 - T).$$

wnioskujemy o prawdziwości naszego stwierdzenia.

Zauważmy, że na podstawie (13) otrzymujemy, że spełnione jest założenie (vii). Co więcej, mamy:

$$A = \sup\{A_n(t) : t \in I, n = 1, 2, ...\} = -\ln(1 - T). \tag{14}$$

Następnie, zwróćmy uwagę na to, że dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$ i dla $x = (x_n) \in l_\infty$ zachodzi następująca nierówność:

$$|f_n(t, x_1, x_2, \ldots)| \leqslant \frac{\frac{T\pi}{2}}{n + x_n^2 + x_{n+1}^2} \leqslant \frac{T\pi}{2n}.$$

A to oznacza, że spełnione jest założenie (iii) z $p_n = \frac{T\pi}{2n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$. Oczywiście założenie (i) jest spełnione, jeżeli zażądamy, że $x_0 = (x_n^0) \in l_\infty$.
W końcu, ustalmy dowolną liczbę $r > 0$ i rozważmy kulę $B(x_0, r)$ w przestrzeni l_∞. Funkcja $f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ jest jednostajnie ciągła na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. To stwierdzenie jest konsekwencją faktu, że odwzorowanie $f_1 = f_1(t, x_1, x_2, \ldots)$ ma największy moduł ciągłości pośród funkcji f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ na zbiorze $I \times B(x_0, r)$. Z drugiej strony wszystkie funkcje f_n są jednostajnie ciągłe na zbiorze $I \times B(x_0, r)$ ponieważ funkcja $f_n(t, x_1, x_2, \ldots)$ zależy tylko od trzech zmiennych. A zatem, korzystając z Uwagi 4 dostajemy, że spełnione jest założenie (ii) Twierdzenia 5.

Otrzymujemy zatem, że rozważany tutaj semiliniowy nieskończony układ równań różniczkowych ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale $I = [0, T]$, gdzie $T > 0$ i T spełnia nierówność:

$$-T \ln(1 - T) < 1.$$

Niezależnie od tego mamy, że $(x_n(t)) \in l_\infty$.

Twierdzenie egzystencjalne dla nieskończonych układów równań różniczkowych w przestrzeni l_∞ z zanikającym lub powiększającym się zaburzeniem

W podrozdziale tym przedstawimy specjalny przypadek badanego poprzednio semiliniowego nieskończonego układu równań różniczkowy (9) z warunkami początkowymi (10). Bardziej dokładnie, będziemy rozważali pewien szczególny przypadek wyrazu zaburzonego $f = f(t, x) = (f_1(t, x), f_2(t, x), \ldots)$ występującego w nieskończonym układzie (9).
Na początku weźmy pod uwagę nieskończony układ równań różniczkowych:

$$x_n' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t) x_j + f_n(t, x_n, x_{n+1}, \ldots) \tag{15}$$

z warunkami początkowymi:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{16}$$

dla $n = 1, 2, \ldots$ i dla $t \in I = [0, T]$.
Będziemy rozważali problem (15)–(16) przy założeniach (i), (iv)–(vii) Twierdzenia 5. Co więcej, założenia (ii), (iii) zastąpimy następującymi:

(ii') Funkcja $t \to f(t,x)$ działająca ze zbioru $I \times l_\infty$ w przestrzeń l_∞ jest jednostajnie ciągła na I ze względu na x należący do dowolnej kuli $B(x_0, r)$ w przestrzeni l_∞.

(iii') Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje nieujemna stała k_n taka, że dla wszystkich $x, y \in l_\infty$, $x = (x_n)$, $y = (y_n)$, spełniona jest następująca nierówność:

$$|f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, ...)| \leqslant k_n \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} \ .$$

(iii") Ciąg stałych (k_n) występujący w założeniu (iii') jest ograniczony.

Zauważmy, że biorąc pod uwagę założenia (ii'), (iii') i (iii") możemy zdefiniować następujące skończone stałe:

$$F = \sup\{|f_n(t, 0, 0, ...)| : \ t \in I, \ n = 1, 2, ...\} \ ,$$

$$k = \sup\{k_n : \ n = 1, 2, ...\} \ .$$

Dalej zauważmy, że z założeń (iii'), (iii") wynika, że funkcja $f = f(t,x)$ spełnia warunek Lipschitza ze stałą k ze względu na zmienną x. Rzeczywiście, dla dowolnie ustalonych $x = (x_n)$, $y = (y_n) \in l_\infty$ i dla każdego ustalonego $t \in I$ mamy:

$$\begin{aligned} ||f(t,x) - f(t,y)|| &= \sup\{|f_n(t, x_n, x_{n+1}, ...) - f_n(t, y_n, y_{n+1}, ...)| : \ n = 1, 2, ...\} \\ &\leqslant \sup\{k_n \sup\{|x_j - y_j| : \ j \geqslant n\} \ i = 1, 2, ...\} \\ &\leqslant \sup\{k_n ||x - y|| : \ n = 1, 2, ...\} \leqslant k||x - y|| \ . \end{aligned}$$

(17)

Oprócz tego zauważmy, że funkcja $f = f(t,x)$ jest jednostajnie zbieżna na zbiorze $I \times B(x_0, r)$, gdzie $r > 0$ jest dowolnie ustalone.
W celu udowodnienia tego stwierdzenia ustalmy dowolnie $t_1, t_2 \in I$ oraz $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$. Wtedy, na podstawie (17) mamy:

$$\begin{aligned} ||f(t_2, x_2) - f(t_1, x_1)|| &\leqslant ||f(t_2, x_2) - f(t_2, x_1)|| + ||f(t_2, x_1) - f(t_1, x_1)|| \\ &\leqslant k||x_2 - x_1|| + ||f(t_2, x_1) - f(t_1, x_1)|| \ . \end{aligned}$$

Stąd, w świetle założenia (ii') uzyskujemy żądaną jednostajną ciągłość.

Teraz możemy przedstawić wynik dotyczący problemu (15)–(16).

Twierdzenie 8 *Załóżmy, że założenia* (i), (ii'), (iii'), (iii") *i* (iv)-(vii) *są spełnione oraz* $T(A + k) < 1$. *Wtedy problem (15)–(16) ma co najmniej jedno rozwiązanie* $x = x(t) = (x_n(t))$ *zdefiniowane na przedziale* $I = [0, T]$ *i takie, że* $x(t) \in l_\infty$ *dla* $t \in I$.

Dowód. Będziemy postępowali podobnie jak w dowodzie Twierdzenia 5. Tak więc ustalmy $n \in \mathbb{N}$. Wtedy, dla dowolnie ustalonych $x = (x_n) \in l_\infty$ i $t \in I$, na podstawie założeń i faktów ustalonych powyżej, otrzymujemy:

$$\begin{aligned}|g_n(t,x)| &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j| + |f_n(t,x_n,x_{n+1},\ldots)| \\ &\leqslant A_n(t)||x|| + |f_n(t,x_n,x_{n+1},\ldots) - f_n(t,0,0,\ldots)| + |f_n(t,0,0,\ldots)| \\ &\leqslant A_n(t)||x|| + k_n \sup\{|x_j| : j \geqslant n\} + F \leqslant A||x|| + k_n||x|| + F \ ,\end{aligned}$$

gdzie, podobnie jak w poprzednich rozważaniach, oznaczyliśmy:

$$g_n(t,x) = g_n(t,x_1,x_2,\ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t,x_n,x_{n+1},\ldots)$$

dla $n = 1, 2, \ldots$. Daje to następujące oszacowanie:

$$||g(t,x)|| \leqslant (A+k)||x|| + F \ .$$

Z powyższego oszacowania wynika, że operator $g = g(t,x)$ odwzorowuje zbiór $I \times l_\infty$ w l_∞.

Następnie, weźmy liczbę:

$$r = (FT + (A+k)T||x_0||)/(1-(A+k)T) \ .$$

Rozważmy operator $g(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0,r)$. W związku z wcześniej ustaloną jednostajną ciągłością operatora $f = f(t,x)$ na zbiorze $I \times B(x_0,r)$ i zgodnie z rozumowaniem przeprowadzonym w dowodzie Twierdzenia 5 wnioskujemy, że operator $g(t,x)$ jest jednostajnie ciągły na zbiorze $I \times B(x_0,r)$.

Ustalmy teraz niepusty podzbiór X kuli $B(x_0,r)$ i weźmy dowolne $x, y \in X$ i $t \in I$. Wtedy, dla dowolnie ustalonego $n \in \mathbb{N}$ otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
|g_n(t,x)-g_n(t,y)| &\leqslant \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| + |f_n(t,x_n,x_{n+1},\ldots)-f_n(t,y_n,y_{n+1},\ldots)| \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)x_j + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)x_j - \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)y_j - \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)y_j\right| \\
&+ k_n \sup\{|x_j-y_j| : \ j \geqslant n\} \\
&\leqslant \left|\sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)(x_j-y_j)\right| + \left|\sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)(x_j-y_j)\right| + k_n \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t)|x_j-y_j| + \sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)|x_j-y_j| + k \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} \\
&\leqslant ||x-y|| \sum_{j=1}^{n-1} a_{nj}(t) + \left(\sum_{j=n}^{\infty} a_{nj}(t)\right) \sup\{|x_j-y_j| : j \geqslant n\} \\
&+ k \sup\{\mathrm{diam} X_j : \ j \geqslant n\} \\
&\leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam} X + \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\} + k \sup\{\mathrm{diam} X_j : j \geqslant n\}.
\end{aligned}
$$

Z powyższego oszacowania wynika następująca nierówność:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{diam} g_n(t,X) \leqslant \bar{A}_n(t)\mathrm{diam} X &+ \bar{\bar{A}}_n(t) \sup\{\mathrm{diam} X_j : \ j \geqslant n\} \\
&+ k \sup\{\mathrm{diam} X_j : \ j \geqslant n\} \ , \qquad (18)
\end{aligned}
$$

która zachodzi dla każdego $n \in \mathbb{N}$.
Teraz analogicznie jak w dowodzie Twierdzenia 5 definiujemy funkcję $b : I \to \mathbb{R}_+$ w następujący sposób:

$$
b(t) = \limsup_{n\to\infty} \bar{\bar{A}}_n(t) \ .
$$

Wtedy, z oszacowania (18) wnioskujemy, że ma miejsce następującą nierówność:

$$
\mu(g(t,X)) \leqslant (b(t)+k)\mu(X) \ ,
$$

gdzie μ jest miarą niezwartości zdefiniowaną za pomocą wzoru (2).
Ostatecznie, zbierając wszystkie ustalone fakty i wykorzystując Twierdzenie 5 kończymy dowód.

Teraz zwróćmy uwagę na drugi szczególny przypadek semiliniowego, nieskończonego układu równań różniczkowych (9), który ma postać:

$$
x_n' = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}(t)x_j + f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n) \ , \qquad (19)
$$

dla $n = 1, 2, \dots$ i dla $t \in I$. Oczywiście układ (19) będzie rozważany z warunkami początkowymi (10) tzn.:

$$x_n(0) = x_n^0 \tag{20}$$

$(n = 1, 2, \dots)$. Tak samo, jak wcześniej, szukamy rozwiązań problemu (19) –(20) w przestrzeni l_∞ przy czym głównym narzędziem używanym w naszych rozważaniach jest miara niezwartości μ wyrażona wzorem (2).

Będziemy zakładali teraz, że spełnione są założenia (i), (iv)–(vii) sformułowane wcześniej, podczas gdy założenia (ii), (iii) będą zastąpione następującymi:

($\bar{\text{ii}}$) Dla każdej ustalonej liczny naturalnej n funkcja $f_n : I \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest ciągła i dla każdej liczby naturalnej j $(1 \leqslant j \leqslant n)$ istnieje nieujemna stała k_j^n taka, że dla dowolnych $x = (x_n), y = (y_n) \in l_\infty$ i dla każdego $t \in I$ zachodzi następująca nierówność:

$$\left|g_n(t, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) - g_n(t, x_1, \dots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \dots, x_n)\right| \leqslant k_j^n |x_j - y_j| \ .$$

($\bar{\text{iii}}$) Dla każdej naturalnej liczny n mamy, że $k_n = \sum_{j=1}^{n} k_j^n < 1$. Co więcej, $k < 1$, gdzie $k = \sup\{k_n : \ n = 1, 2, \dots\}$.

Teraz możemy zaprezentować nasze twierdzenie egzystencjalne.

Twierdzenie 9. *Załóżmy, że spełnione są założenia* (i), ($\bar{\text{ii}}$), ($\bar{\text{iii}}$), (iv)–(vii), *jeśli dodatkowo $T(A + k) < 1$, to problem (19)–(20) ma co najmniej jedno rozwiązanie $x = x(t) = (x_n(t))$ zdefiniowane na przedziale I i takie, że $x(t) \in l_\infty$ dla każdego $t \in I$.*

Dowód tego twierdzenia może być przeprowadzony podobnie, jak dowód Twierdzenia 8 dlatego zostanie pominięty.

Wnioski i uwagi końcowe

Omówione w pracy twierdzenia o istnieniu rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych zostały uzyskane dzięki zastosowaniu teorii miar niezwartości. Miary niezwartości, którymi posłużyliśmy się w tej pracy, zostały skonstruowane w klasycznych ciągowych przestrzeniach Banacha takich jak przestrzeń ciągów bezwzględnie sumowalnych l_1 oraz przestrzeń l_∞ złożonych z ciągów ograniczonych. Ponadto, w pracy wykorzystano również twierdzenia o istnieniu rozwiązań zagadnień Cauchy'ego dla równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha. Twierdzenia te, po ich odpowiednim zaadoptowaniu, dotyczą właśnie istnienia rozwiązań zagadnienia Cauchy'ego dla nieskończonych układów równań różniczkowych, które są rozpatrywane we wspomnianych wyżej przestrzeniach ciągowych l_1 oraz l_∞.

Omówione w pracy rezultaty zostały zilustrowane odpowiednio dobranymi przykładami, które wskazują na użyteczność udowodnionych w pracy twierdzeń.

Abstrakt

O rozwiązaniach nieskończonych układów równań różniczkowych w klasycznych przestrzeniach Banacha

Celem przedłożonej pracy jest omówienie pewnych twierdzeń dotyczących istnienia rozwiązań nieskończonych układów równań różniczkowych w pewnych przestrzeniach Banacha. W pracy rozważamy dwie klasyczne ciągowe przestrzenie Banacha, które często pojawiają się w rozważaniach dotyczących nieskończonych układów równań różniczkowych.

Zauważmy, że nieskończone układy równań różniczkowych występują często w wielu konkretnych zastosowaniach do pewnych zagadnień z mechaniki oraz do modelowania procesu stochastycznego urodzin i śmieci oraz do opisu wielu innych problemów. Głównym narzędziem używanym w pracy jest teoria miar niezwartości oraz pewne twierdzenia o istnieniu rozwiązań równań różniczkowych w przestrzeniach Banacha.

Rezultaty uzyskane w pracy są zilustrowane omówieniem kilku przykładów nieskończonych układów równań różniczkowych.

Słowa kluczowe: równanie różniczkowe, przestrzeń Banacha, miara niezwartości, nieskończony układ równań różniczkowych, zagadnienie Cauchy'ego

Abstract

On solutions of an infinite system of differentiam equations in classical Banach spaces

The goal of the presented paper is the discussion of some theorems concerning the existence of solutions of Infinite systems of differentia equations in some Banach spaces. In the paper we consider two classical Banach sequence spaces, which frequently appear in considerations associated with Infinite systems of differentia equations.

Notice that infinite systems of differential equations occur often in several concrete applications to some topics of mechanics and modelling of the stochastic process of birth and death as well to the description of a lot of other problems.

The main tool used in the paper is the theory of measures on noncompactness and some theorems on the existence of solutions of differential equations in Banach spaces.

The results obtained in the paper are illustrated with the discussion of a few examples of infinite systems of differential equations.

Keywords: difference equation, Banach space, measure of noncompactness, Infinite systems of differentia equations, Cauchy's problem

References

Banaś, J., Goebel, K. (1980). *Measures of Noncompactness in Banach Spaces,* Lect. Notes in Pure and Appl. Math. 60, Marcel Dekker, New York.

Banaś, J., Lecko, M. (2001). *Solvability of infinite systems of differential equations in Banach sequence spaces*, J. Comput. Appl. Math. 137 363–375.

Banaś, J., Mursaleen, M. (2014). *Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations*, Springer, New Delhi.

Deimling, K. (1977). *Ordinary Differential Equations in Banach Spaces*, Lect. Notes in Math. 596, Springer, Berlin.

Deimling, K. (1985). *Nonlinear Functional Analysis*, Springer, Berlin.

Fisz, M. (1980). *Probability Theory and Mathematical Statistics*, Krieger Publishing Company, New York, USA.